Formelsamling, MET430

Funksjoner

Lineær funksjon: $y = ax + b$

Ettpunktsformelen for en rett linje: $y - y_1 = a(x - x_1)$

Stigningstall for rett linje gjennom to kjente punkter: $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Andregradsfunksjon: $y = ax^2 + bx + c$

Løsning av andregradsligning:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Faktorisering av andregradsfunksjoner: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

Potensfunksjon: $y = x^p$

Ligningen $x^n = a$, der a er et positivt tall og $n \neq 0$, har alltid en løsning $x = a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

Regneregler for potenser:

i) $x^p \cdot x^q = x^{p+q}$

ii) $\frac{x^p}{x^q} = x^{p-q}$

iii) $(x^p)^q = x^{pq}$

iv) $(xy)^p = x^p y^p$

v) $(\frac{x}{y})^p = \frac{x^p}{y^p}$

vi) $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$

vii) $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

Logaritmefunksjoner

Den naturlige logaritmefunksjonen: $y = \ln x$

Regneregler for logaritmer:

i) $\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$

ii) $\ln(\frac{x}{y}) = \ln x - \ln y$

iii) $\ln(x^p) = p \cdot \ln x$

iii) $\ln(e^x) = x$

iv) $e^{\ln x} = x$

Derivasjon

Generelle derivasjonsregler: La $u = u(x)$ og $v = v(x)$.

$y = u + v \quad \Rightarrow \quad y' = u' + v'$

$y = u - v \quad \Rightarrow \quad y' = u' - v'$

$y = u \cdot v \quad \Rightarrow \quad y' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$y = \frac{u}{v} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$y = f(u) \quad \Rightarrow \quad y' = f'(u) \cdot u' \qquad eller \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

Spesielle derivasjonsregler: La $u = u(x)$ og $v = v(x)$.

$f(x) = c \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0$, c konstant
$f(x) = ax + b \quad \Rightarrow \quad f'(x) = a$, $\quad a$ og b konstanter
$f(x) = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = (u(x))^n \quad \Rightarrow \quad f'(x) = n(u(x))^{n-1} \cdot u'(x)$
$f(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^x$
$f(x) = e^{u(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^{u(x)} \cdot u'(x)$
$f(x) = \ln x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \ln(u(x)) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{u(x)} \cdot u'(x)$
$f(x) = a^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = a^x \cdot \ln a, \quad a > 0$

Tilvekstformelen

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)$$

Taylors formel

$$F_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Integrasjon

Ubestemte integral

1) $\int k\,dx = kx + C$, $\quad$ når k er en konstant
2) $\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$, $\quad$ når n$\neq -1$
3) $\int \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$
4) $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$
5) $\int \frac{1}{x+a}\,dx = \ln|x+a| + C$
6) $\int e^{kx}\,dx = \frac{1}{k}e^{kx} + C$
7) $\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C$

Regneregel: $\int k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int f(x)\,dx$

Substitusjon $\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)du \quad$ der $u = g(x)$

1) $\int (g(x))^n \cdot g'(x)\,dx = \frac{1}{n+1}g(x)^{n+1} + C$, $\quad$ når $n \neq -1$
2) $\int e^{g(x)} \cdot g'(x)\,dx = e^{g(x)} + C$
3) $\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \ln|g(x)| + C$

Delvis integrasjon $\int u' \cdot v\,dx = u \cdot v - \int u \cdot v'\,dx$

Delbrøkoppspalting:

1) $\dfrac{c_1x + c_0}{(x-c)(x-d)} = \dfrac{A}{x-c} + \dfrac{B}{x-d}$ $\qquad$ 2) $\dfrac{c_1x + c_0}{(x-c)^2} = \dfrac{A}{x-c} + \dfrac{B}{(x-c)^2}$

Differensialligninger

1) En separabel differensialligning er av form

$$\frac{dy}{dx} = g(y) \cdot h(x)$$

Ved separasjon av variablene omformes den til

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int h(x) dx$$

Spesialtilfeller av separable differensialligninger:
I) Eksponensiell vekst/nedgang: $y' = ky$.
II) Begrenset vekst: $y' = k(A - y)$, der k og A er positive konstanter.
III) Logistisk vekst: $y' = ky(a - y)$, der k og A er positive konstanter.

2) En lineær differensialligning av 1. orden er av form

$$y' + P(x) \cdot y = Q(x)$$

Beregn $\int P(x)\, dx$, og multipliser ligningen med faktoren $e^{\int P(x)\, dx}$.
Ligningen kan da omformes til

$$\left(y \cdot e^{\int P(x)\, dx}\right)' = Q(x) \cdot e^{\int P(x)\, dx}$$

3) Homogene lineære differensialligninger av 2. orden av form

$$y'' + by' + cy = 0$$

har karakteristisk ligning

$$r^2 + br + c = 0.$$

4) Eulers differensialligning:

$$x^2 \cdot y'' + bx \cdot y' + cy = 0$$

Leter etter løsning av form $y = x^r$.

5) Inhomogene differensialligninger av 2. orden.

Den generelle løsningen av en inhomogen differensialligning er lik den generelle løsningen av den tilsvarende homogene differensialligningen, pluss en spesiell løsning av den inhomogene ligningen.

Let etter en spesiell løsning av samme type som høyresiden i den inhomogene differensialligningen.

Lineært uavhengige vektorer.

La $\overrightarrow{v}_1$, $\overrightarrow{v}_2$, ..., $\overrightarrow{v}_n$ være vektorer av samme dimensjon, og slik at ingen av disse vektorene er nullvektor. Vektorene er lineært avhengige dersom det fins en lineærkombinasjon $a_1\overrightarrow{v}_1 + a_2\overrightarrow{v}_2 + ... + a_m\overrightarrow{v}_m = \overrightarrow{0}$, der minst en $a_i \neq 0$.

Vektorene er lineært uavhengige dersom $a_1\overrightarrow{v}_1 + a_2\overrightarrow{v}_2 + ... + a_m\overrightarrow{v}_m = \overrightarrow{0}$ medfører at $a_1 = a_2 = ... = a_m = 0$.

Egenverdier for 2×2−matriser.

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Diagonaliserbar matrise

Matrisen A er diagonaliserbar hvis og bare hvis $P^{-1}AP = D$, der P er en inverserbar matrise og D er en diagonalmatrise.

Kvadratiske former

En kvadratisk form i to variable er av form: $Q(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$.

Den tilhørende matrisen er $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$.

Q er positiv definitt dersom $Q(x,y) > 0$ for alle $(x,y) \neq (0,0)$.

Q er negativ definitt dersom $Q(x,y) < 0$ for alle $(x,y) \neq (0,0)$.

Q er indefinitt hvis det fins både punkter der $Q(x,y) > 0$ og punkter der $Q(x,y) < 0$.

Q er positiv semidefinitt dersom $Q(x,y) \geqq 0$ for alle $(x,y) \neq 0$.

Q er negativ smidefinitt dersom $Q(x,y) \leqq 0$ for alle $(x,y) \neq 0$.

Lineært system av differensialligninger

$y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2$
$y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2$

Generell løsning: $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} e^{\lambda_1 x} + C_2 \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} e^{\lambda_2 x}$

der $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ er egenvektorer for egenverdiene λ_1 og λ_2.